PBL in der Mathematik – ein Umsetzungsbeispiel

Prof. Dr. Edda Eich-Soellner, Prof. Dr. Rainer Fischer, Kathrin Wolf

„Wofür brauche ich das eigentlich?" Für viele Studierende stellt sich diese Frage in Mathematik-Veranstaltungen der ersten Semester. Ihnen fällt es schwer, die Verbindung von Theorie und Praxis herzustellen und einen Bezug zu Anwendungen zu sehen. Durch den Einsatz der Methode „Problembasiertes Lernen" (kurz: PBL; Weber 2007) in der Veranstaltung „Angewandte Mathematik" an der Hochschule München[1] soll die Motivation der Studierenden gefördert werden, sich mit den theoretischen Grundlagen der Mathematik zu beschäftigen, und – so unsere Hoffnung – vielleicht sogar Begeisterung für das Fach geweckt werden. Außerdem sollen die Studierenden durch das Arbeiten im Team auf den beruflichen Alltag vorbereitet werden. Um die Problemlösefähigkeit der Studierenden in mathematischen Fächern zu fördern und sie in die mathematische Modellierung einzuführen, werden anwendungsorientierte Aufgaben eingesetzt. Anstatt systematisch „Kochrezepte" zur Lösung von Mathematik-Übungsaufgaben anzuwenden, sollen Studierende so mehr Selbstständigkeit bei der Analyse und dem Lösen komplexer Aufgaben erlangen.

1. Didaktisches Konzept

Bei der Lehrveranstaltung „Angewandte Mathematik" handelt es sich um ein Pflichtfach für Studierende des zweiten Semesters der Studiengänge Informatik und Scientific Computing an der Fakultät Informatik und Mathematik. Die Veranstaltung umfasst vier Semesterwochenstunden.

Lernergebnisse der Veranstaltung

Abb. 1: Lernergebnisse

In der Lehrveranstaltung werden nicht nur fachliche Kompetenzen der Studierenden gefördert, sondern auch persönliche und soziale (vgl. Abb. 1). Lernergebnisse, die die fachlichen Kompetenzen betreffen, sind in erster Linie die Schulung der Problemlösefähigkeit und Modellierungskompetenz: Die Studierenden lernen, mathematische Modelle für praktische Probleme zu entwickeln. Zum Teil handelt es sich dabei um mathematische Inhalte, die die Studierenden aus dem vorangegangenen Semester kennen, zum anderen arbeiten sie sich insbesondere im zweiten Teil des Semesters in neue Konzepte anhand praktischer Aufgabenstellungen ein. Zudem erlernen die Studierenden den Umgang mit

[1] Der Einsatz von „Problembasiertem Lernen" erfolgt im Rahmen des Projekts „HD MINT" an der Hochschule München. Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL12023F gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

einem Computeralgebrasystem (hier: Mathematica[2]) und implementieren damit ihre mathematischen Modelle. Wichtig ist dabei, dass sie auch in der Lage sind, Ergebnisse kritisch zu hinterfragen. Sie sollen erkennen, dass es Teil der mathematischen Modellierung ist, die Ergebnisse zu interpretieren und zu prüfen. Ihre methodischen Kompetenzen werden geschult, indem sie die Vorgehensweise und Ergebnisse sowohl schriftlich dokumentieren und anschaulich visualisieren als auch am Ende des Semesters präsentieren.

Die sozialen und personalen Kompetenzen werden durch die Zusammenarbeit in Teams gefördert. Die Studierenden lernen, wie man die Arbeit teilt und gemeinsam eine Lösung für die Problemstellung findet. Oftmals kommt es in den Gruppen zu Konflikten, z.B. beschweren sich Studierende regelmäßig über ihre Gruppenarbeitspartner, die angeblich zu wenig mitarbeiten. Der Umgang mit den möglicherweise entstehenden Konflikten ist für die Studierenden Teil des Lernprozesses. Sie lernen Verantwortung für das Gelingen der Teamarbeit zu tragen, ihren Teil der Arbeit eigenständig und zuverlässig zu erledigen sowie sich Wissen selbstständig zu erarbeiten.

Veranstaltungsablauf

Um diesen Lernergebnissen Rechnung zu tragen, ist der Ablauf der Veranstaltung in drei Teile gegliedert, die aufeinander aufbauen (vgl. Abb. 2).

Abb. 2: Ablauf

Wochen	Ablauf	Details
1–4	Grundlagen „Mathematica“	Abwechselnde Phasen: • Just-in-Time-Teaching • „Live-Programming“ • Frontalunterricht
5–9	Einfache anwendungsorientierte Problemstellungen	Einführung PBL & Beispiel
		1. Problemstellung (ca. 1,5 Wochen)
		Workshop Gruppendynamik
		2. Problemstellung (ca. 1,5 Wochen)
		3. Problemstellung (ca. 1,5 Wochen)
10–15	Komplexe anwendungsorientierte Problemstellungen	Komplexe Problemstellung (ca. 3 Wochen)
		Präsentationen

In den ersten Wochen erlernen die Studierenden die Grundlagen des Computeralgebrasystems „Mathematica“. Die Einführung erfolgt sowohl im Frontalunterricht, in dem die grundlegenden Funktionalitäten präsentiert und anschließend in Übungen selbstständig angewendet werden, als auch mit der Methode Just-in-Time Teaching (Novak, Patterson, Gavrin & Christian 1999). Diese Phase soll die Studierenden befähigen, Mathematica sicher als Werkzeug nutzen zu können.

In der anschließenden ersten PBL-Phase bearbeiten Studierende anwendungsorientierte Problemstellungen in Zweierteams. Zuerst lernen die Seminarteilnehmenden die Methode kennen, indem sie anhand eines einfachen Beispiels den „Siebensprung“ durchlaufen. Es schließen sich drei anwendungsorientierte Problemstellungen an, die jeweils ungefähr eineinhalb Wochen dauern und mit einer schriftlichen Dokumentation der Ergebnisse enden. Sie umfasst in der Regel die Definition und Analyse des Problems, die Beschreibung der mathematischen Lösung, die Implementierung in Mathematica, das Testen des implementierten Modells sowie eine abschließende Diskussion. Für jede PBL-Aufgabe werden die Studierenden von den Dozierenden in wechselnde Zweierteams eingeteilt, wobei jedes Team sich mit derselben Aufgabenstellung beschäftigt. In der Präsenzzeit haben die Studierenden die Möglichkeit, Fragen zu stellen oder Tipps zur weiteren Vorgehensweise zu erhalten, falls sie an einer Stelle nicht mehr weiter kommen. Die Rolle des Dozierenden verschiebt sich also von der klassischen Rolle des Vortragenden hin zum „Lernbegleiter“.

[2] Bei Mathematica® handelt es sich um ein Computeralgebrasystem des Unternehmens Wolfram Research, online: http://www.wolfram.com/mathematica/ [20.06.2014]

Auf diese Phase aufbauend bearbeiten die Studierenden im letzten Teil des Semesters eine komplexere Problemstellung, für deren Bearbeitung sie ungefähr drei Wochen Zeit haben. Sie finden sich nun selbstständig in Zweierteams zusammen, wobei jedes Team eine eigene Aufgabenstellung bearbeitet. Die Themen sind so gewählt, dass sie sich in der Regel das mathematische Hintergrundwissen selbstständig erarbeiten können. Zusätzlich zur schriftlichen Dokumentation präsentieren die Studierenden bei der komplexen PBL-Aufgabe am Semesterende ihre Bearbeitungen und Ergebnisse.

Bewertungskriterien

Die Bewertung der Veranstaltung setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Zu 40 % fließt die Bewertung der Präsentation am Ende des Semesters in die Gesamtnote ein und zu 60 % die Bewertungen der schriftlichen Ausarbeitungen der drei grundlegenden sowie der komplexen Problemstellung. In der Bewertung werden neben der inhaltlichen Korrektheit auch Aspekte wie Eleganz der implementierten Lösung in Mathematica, Kreativität und Sorgfältigkeit berücksichtigt. Zudem gibt jeder Studierende mit der schriftlichen Auswertung an, welchen Beitrag er zum Gelingen der Arbeit geleistet hat. So kann die individuelle Leistung jedes Studierenden sowie das Engagement in der gemeinsamen Arbeit berücksichtigt werden. Bei der Bewertung des Referats wird zusätzlich auf die Verständlichkeit, den Aufbau und den Medieneinsatz Wert gelegt. Zur besseren Transparenz werden die einzelnen Aspekte vorab den Studierenden kommuniziert.


Abb. 3: Satellitenschüssel

2. Konkrete Beispiele von Problemstellungen

Auszug aus den von den Studierenden zu lösenden Aufgaben:

1. Lichtstrahlen fallen senkrecht von oben auf eine gekrümmte Fläche, die durch den Graphen der Funktion y=f(x) gegeben ist.
   - Berechnen Sie den Auftreffpunkt.
   - Unter welchem Winkel trifft der Strahl auf?
   - Wie wird er reflektiert?
2. Implementieren Sie dies in Mathematica und testen Sie es an verschiedenen Funktionen.
3. Experimentieren Sie mit verschiedenen Funktionen. Treffen sich die reflektierten Strahlen in einem Punkt?
4. Zeigen Sie mit Mathematica, dass sich für die Parabel alle reflektierten Strahlen in einem Punkt treffen.

Mathematica-Lösungscode

```
f[x_] := 0.5 x^2 - 1 (* Funktion *)

rneu[x_] := {0, -1} + 2 {-f'[x], 1} / (1 + (f'[x])^2)
(* Richtung des reflektierten Strahls*)
pneu[x_] := Module[{lsg, a, laenge},
  (* Schnittpunkt mit dem Paraboloid nach Reflexion *)
  lsg = {a, laenge} /.
    FindRoot[{x, f[x]} + laenge rneu[x] == {a, f[a]},
     {{a, -x}, {laenge, 3}}];
  {lsg[[1]], f[lsg[[1]]]}]
```

Im Folgenden stellen wir vier Beispiele vor, zwei einfache anwendungsorientierte Aufgaben und zwei komplexere, die gegen Ende des Semesters bearbeitet wurden.

Ein Beispiel für eine in der Veranstaltung eingesetzte einfache anwendungsorientierte Problemstellung ist die Reflexion von Strahlen an einer Satellitenschüssel, wie in Abbildung 3 dargestellt. Die Studierenden sollen anhand dieses Beispiels die aus der Schule und den Mathematikveranstaltungen des ersten Semesters bekannten mathematischen Grundlagen anwenden und verknüpfen.

Neben der Berechnung der Strahlengänge bei der Reflexion an verschiedenen gekrümmten Flächen sollen sie auch mit Mathematica beweisen, dass sich bei der Reflexion an Paraboloiden alle Strahlen in einem Punkt treffen. Satellitenschüsseln haben nämlich deshalb einen parabelförmigen Querschnitt, weil diese Kurvenform als einzige die Eigenschaft hat, aus dem Unendlichen parallel eintreffende Strahlen in einen Punkt zu reflektieren.

Um die Richtung des reflektierten Strahls zu berechnen, werden zum einen Hilfsmittel der Analysis wie die Berechnung der Tangente, zum anderen Hilfsmittel der Linearen Algebra wie Spiegelung, Projektion und Vektoraddition benötigt. Gerade diese Verknüpfung zweier verschiedener mathematischer Fachgebiete stellt für viele Studierende eine besondere Herausforderung dar. Einen Ausschnitt aus dem Mathematica-Lösungscode zeigt die nebenstehende Abbildung.

Ein weiteres Beispiel einer Problemstellung einer einfachen anwendungsorientierten Aufgabe ist die Berechnung des Schattenwurfs eines Körpers, ausgehend von einer punktförmigen Lichtquelle (vgl. Abb. 4). Die benötigten Mathematikkenntnisse gehen hierbei kaum über die Bestimmung von Schnittpunkten zwischen Gerade und Ebene hinaus, sodass die Aufgabe problemlos im zweiten Semester einsetzbar ist.

Für die Aufgabenstellungen hat es sich bewährt, sie relativ offen und nicht zu kleinschrittig zu formulieren. Die Lösungsideen sind dadurch deutlich kreativer und vielfältiger, auch wenn einige Studierende dadurch zunächst verunsichert werden.

Während die einfacheren Aufgabenstellungen für alle Gruppen identisch sind, sind die komplexeren Problemstellungen verschieden und können von den Gruppen aus einem von uns bereitgestellten Angebot frei ausgewählt werden. Beispiele für solche Problemstellungen zeigen die beiden Abbildungen 5 und 6.

In einer Aufgabe sollen die Studierenden kürzeste Wege im Netzplan des Münchner Verkehrsverbundes[3] zwischen zwei Haltestellen berechnen. Eine andere Problemstellung behandelt das Kinderspielzeug Spirograph: Mit Hilfe zweier Zahnräder können vielfältige Kurven gezeichnet werden. Ziel ist hier die Herleitung der Kurvengleichung und ihre Analyse.

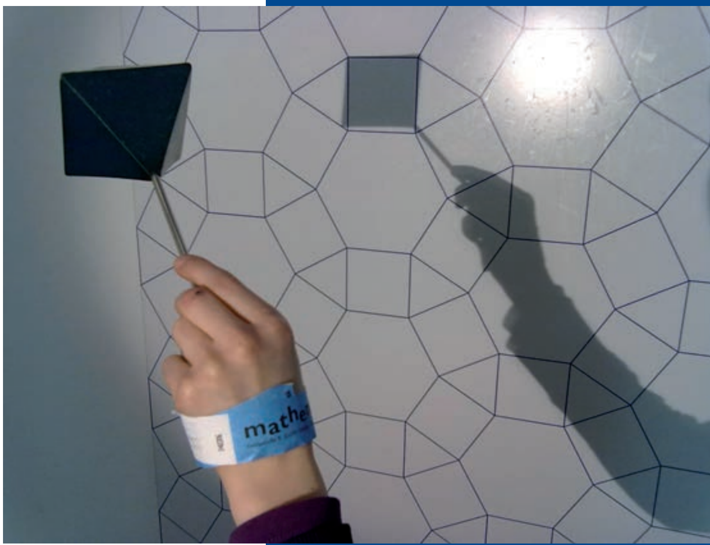

Abb. 4: Schattenwurf

Abb. 5: MVV-Schnellnetzplan

Weitere Ideen für derartige Aufgaben finden sich in den Links am Ende des Artikels.

Der Schwierigkeitsgrad und Arbeitsaufwand der bereitgestellten komplexeren Aufgabenstellungen variiert z.T. erheblich, sodass die Studierenden häufig zu den leichteren Aufgaben tendiert haben. Daher hat es sich bewährt, den Schwierigkeitsgrad in die Note einfließen zu lassen und dies auch vorher entsprechend transparent zu machen.

3. Erfahrungen

Die Erfahrungen mit dieser Art Mathematikveranstaltung sind sehr positiv. Dies unterstreichen sowohl die Rückmeldungen der Dozierenden als auch die der Studierenden.

Abb. 6: Spirograph

[3] Bild: MVV Münchener Verkehrs- und Tarifverbund, Schnellbahnnetz 2014, http://www.mvv-muenchen.de/fileadmin/media/Dateien/2_Netze_Bahnhoefe/bilder/netz14_Version_DB_13.08.13.pdf [26.06.2014]

Eindruck der Dozierenden

Ein wesentlicher Vorteil dieser Veranstaltung aus Sicht der Dozierenden besteht darin, dass die Studierenden Kompetenzen in mathematischer Modellbildung erwerben und Mathematik nicht nur als Rechnen nach Rezepten wahrnehmen. Als besonders hilfreich erweist sich dabei die explizite Einführung des oben erwähnten „Siebensprungs". Dieser zeigt den Studierenden den Weg zu einem strukturierten und planvollen Arbeitsverhalten auf, was sich auch in der Qualität der Ausarbeitungen widerspiegelt. Durch die aktivere Rolle der Seminarteilnehmer treten deren Schwierigkeiten mit den mathematischen Inhalten sowie mit der Herangehensweise bei der Problemlösung viel schneller und deutlicher zu Tage als in einer Frontalvorlesung. In diesem Fall haben die Studierenden die Möglichkeit, gezielt zu fragen. Dies passiert insbesondere während der Phasen, in denen sie sich neue Themenkomplexe selbstständig erarbeiten.

Rückmeldungen der Studierenden

Auch von Seiten der Studierenden gibt es durchweg positive Rückmeldungen, wie sich insbesondere in Kommentaren zeigt, die häufig bei der Veranstaltungsevaluation abgegeben werden:

- Der Praxisbezug der Aufgaben ruft bei den Studierenden starkes Interesse hervor: „Die Aufgaben veranschaulichen die Anwendung der Mathematik in der Realität."
- Ein großer Teil der Studierenden genießt den hohen Anteil an eigenständiger Arbeit: „Besonders gut gefallen hat mir die Möglichkeit, alles selbst auszuprobieren."
- Viele Studierende zeigen eine sehr hohe Motivation, oft weit über das Geforderte hinaus: „Man hat gemerkt, dass sich Einsatz und Leistungsbereitschaft auszahlen."
- Zudem zeigt sich bei den meisten Seminarteilnehmern eine große Zufriedenheit mit den Ergebnissen: „Ich habe etwas produziert, das funktioniert und gut aussieht."
- Gut angekommen ist bei vielen Studierenden die Arbeit im Team: „Dass man zusammen mit einem Kommilitonen etwas erarbeiten muss, hat mir viel Spaß gemacht."

4. Fazit

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass diese Art von Veranstaltung sowohl Dozierenden als auch Studierenden einerseits Spaß macht, andererseits wichtige Kompetenzen wie Problemlösefähigkeit, Modellierungskompetenz und Teamfähigkeit trainiert. So stellt dieses Seminar eine wertvolle Ergänzung zu den herkömmlichen Mathematikveranstaltungen dar.

Literatur

Novak, G. M.; Patterson, E. T.; Gavrin A. D.; Christian, W. (1999). Just-in-time teaching. Blending active learning with web technology. Upper Saddle River: Prentice Hall.

Weber, A. (2007). Problem-Based Learning. Ein Handbuch für die Ausbildung auf der Sekundarstufe II und auf der Tertiärstufe. Bern: Hep-Verlag.

Empfehlenswerte Links

MathePrisma. http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/index.htm [30.06.2014]
Mathematik-Labor Uni Würzburg. http://www.mathe-labor.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/page/seiten/index1.html [30.06.2014]

Prof. Dr. Edda Eich-Soellner
Hochschule München, Fakultät für Informatik und Mathematik
Lothstr. 64, D-80335 München
eich@hm.edu

Prof. Dr. Edda Eich-Soellner lehrt seit 1995 an der Fakultät für Informatik und Mathematik der Hochschule München Mathematik. Nach der Promotion in Mathematik arbeitete sie mehrere Jahre im Bereich Numerische Mathematik – Informatik – Ingenieuranwendungen (Scientific Computing). Dies bildet auch den Schwerpunkt ihrer Lehrtätigkeit. Darüber hinaus engagiert sie sich im Bereich innovativer Lehr- und Lernkonzepte.

Prof. Dr. Rainer Fischer
Hochschule München, Fakultät für Informatik und Mathematik
Lothstr. 64, D-80335 München
rfischer@hm.edu

Prof. Dr. Rainer Fischer lehrt seit 2012 an der Fakultät für Informatik und Mathematik der Hochschule München. Den Schwerpunkt seiner Lehrtätigkeit bilden Veranstaltungen im Bereich Angewandte Mathematik in den Bachelorstudiengängen Scientific Computing und Informatik. Nach der Promotion an der Technischen Universität München war er mehrere Jahre im Bereich der Fahrdynamiksimulation tätig.

Kathrin Wolf
Hochschule München, Projekt HD MINT
Dachauer Str. 100a, D-80636 München
kathrin.wolf@hm.edu

Kathrin Wolf ist wissenschaftliche Mitarbeiterin im Projekt „HD MINT" an der Hochschule München. Im Rahmen des Projekts berät und unterstützt sie Lehrende bei der Umgestaltung von Lehrveranstaltungen mathematischer Fächer. Sie studierte Mathematik und Physik mit dem Abschluss Staatsexamen an der Universität Heidelberg.